

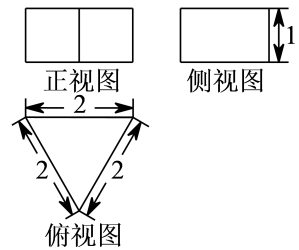
2018年天津河北区理科高三二模数学试卷

一、选择题（每题5分，共40分）

1. 已知全集为 $\mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x|x > 0\}$ ， $B = \{x|x < 1\}$ ，则集合 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B$ 等于（ ）.

- A. $\{x|x < 0\}$ B. $\{x|x \leq 0\}$ C. $\{x|x > 1\}$ D. $\{x|x \geq 1\}$

2. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为（ ）.



- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $2\sqrt{3}$

3. 命题 p : " $\forall x \geq 0, 2^x > x^{2^n}$ " 的否定 $\neg p$ 为（ ）.

- A. $\exists x_0 \geq 0, 2^{x_0} < x_0^{2^n}$ B. $\forall x \geq 0, 2^x < x^2$
C. $\exists x_0 \geq 0, 2^{x_0} \leq x_0^{2^n}$ D. $\forall x \geq 0, 2^x \leq x^2$

4. 二项式 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式的第二项为（ ）.

- A. $6x^4$ B. $-6x^4$ C. $12x^4$ D. $-12x^4$

5. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + 2y - 8 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 3x + y$ 的最大值为（ ）.

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 14

6. 已知点 $A(-1, 0)$ ， $B(1, 0)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点，点 M 在双曲线上， $\triangle ABM$ 为等腰三角形，且顶角为 120° ，则该双曲线的标准方程为（ ）.

- A. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $x^2 - y^2 = 1$

7. 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，则 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为（ ）.

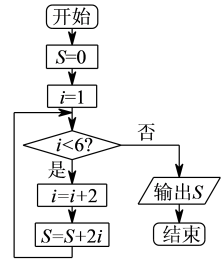
- A. 1 B. 6 C. 9 D. 16

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |2 + \ln x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若存在互不相等的实数 a, b, c, d ，满足 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = m$. 则以下三个结论：① $m \in [1, 2)$ ；② $a + b + c + d \in [e^{-3} + e^{-1} - 2, e^{-4} - 1)$ ，其中 e 为自然对数的底数；③关于 x 的方程 $f(x) = x + m$ 恰有三个不相等的实数解. 正确结论的个数是（ ）.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题（每题5分，共30分）

9. 执行如图所示的程序框图, 则输出 S 的值是 _____ .



10. 若复数 $\frac{a+i}{1-i}$ 为纯虚数(i 为虚数单位), 则实数 a 的值为 _____ .

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $B = 2C, 2b = 3c$. 则 $\cos C$ 的值为 _____ .

12. 若点 $P(3, m)$ 在以 F 为焦点的抛物线 $\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4t \end{cases}$ (t 为参数)上, 则 $|PF|$ 等于 _____ .

13. 由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $y = x - 2$ 及 y 轴所围成的封闭图形的面积是 _____ .

14. 在直角梯形 $ABCD$ 中, 已知 $BC \parallel AD, AB \perp AD, AB = AD = 4, BC = 2$, 若 P 为线段 CD 上一点, 且满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 5$, 则 λ 的值为 _____ .

三、解答题 (本大题共6小题, 共80分)

15. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin x \cos x, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期 .

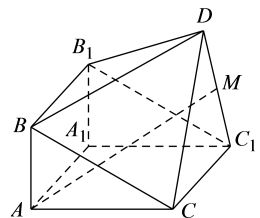
(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值 .

16. 某地拟建立一个艺术博物馆, 采取竞标的方式从多家建筑公司选取一家建筑公经过层层筛选, 甲、乙两家建筑公司进入最后的招标. 现从建筑设计院聘请专家计了一个招标方案: 两家公司从6个招标问题中随机抽取3个问题, 已知这6个问中, 甲公司可正确回答其中的4道题, 而乙公司能正确回答每道题目的概率均为 $\frac{2}{3}$, 且甲、乙两家公司对每题的回答都是相互独立, 互不影响的.

(1) 求甲、乙两家公司共答对2道题的概率.

(2) 设 X 为乙公司正确回答的题数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图, 由直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $D - BB_1CC_1$ 构成的几何体中, $\angle BAC = 90^\circ, AB = 1, BC = BB_1 = 2, C_1D = CD = \sqrt{5}$, 平面 $CC_1D \perp$ 平面 ACC_1A_1 .



(1) 求证: $AC \perp DC_1$.

(2) 若 M 为 DC_1 的中点, 求证: $AM \parallel$ 平面 DBB_1 .

(3) 在线段 BC 上是否存在点 P , 使直线 DP 与平面 BB_1D 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$? 若存在, 求 $\frac{BP}{BC}$ 的值, 若不存在, 说明理由.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $a_1, a_2, a_4 + 2$ 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n .

(2) 设 $b_n = 2^{(-1)^n a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

19. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 A , 在 x 轴负半轴上有一点 B , 满足 F_1 为线段 BF_2 的中点, 且 $AB \perp AF_2$.

(1) 求椭圆 C 的离心率.

(2) 若过 A, B, F_2 三点的圆与直线 $l: x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ 相切, 求椭圆 C 的方程.

(3) 在(1)的条件下, 过右焦点 F_2 作斜率为 k 的直线与椭圆 C 交于 M, N 两点, 在 x 轴上是否存在点 $P(m, 0)$ 使得以 PM, PN 为邻边的平行四边形是菱形, 如果存在, 求出 m 的取值范围, 如果不存在, 说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, 其中 $a > 2$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 恒有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$, 求 a 的取值范围.

(3) 设 $a \in (3, 4)$, $x_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \frac{1}{x_n}$.